

Un contre-exemple à la réciproque du critère de Forni pour la positivité des exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich

(A counterexample to the reciprocal of Forni criterion about positivity of Lyapunov exponents of the Kontsevich-Zorich cocycle)

VINCENT DELECROIX ET CARLOS MATHEUS

Nous introduisons deux surfaces à petits carreaux respectivement de degré 8 dans la strate $\Omega\mathcal{M}_3(2, 2)$ et de degré 9 dans la strate $\Omega\mathcal{M}_4(3, 3)$. Dans ces deux exemples les dimensions des sous-espaces isotropes de l'homologie engendrés par les circonférences des cylindres dans les directions rationnelles sont respectivement 2 et 3 (indépendamment de la pointe). Ainsi, dans chacun de ces exemples, le critère géométrique de G. Forni pour la non-uniforme hyperbolité du cocycle de Kontsevich-Zorich ne s'applique pas. Cependant, en utilisant un critère algébrique pour les conditions de “twisting” et “pinching” de [AV1] et [AV2] (voir [MMY]) nous démontrons que dans les deux cas que ce spectre est simple et ne contient aucun exposant nul. En particulier, la positivité du spectre de Lyapunov pour une mesure régulière n'implique pas l'existence de surface complètement périodique dans le support de cette mesure dont le sous-espace isotrope engendré par les circonférences des cylindres est de dimension maximale.

(We introduce two square-tiled surfaces, one with 8 squares inside $\Omega\mathcal{M}_3(2,2)$, and the other with 9 squares inside $\Omega\mathcal{M}_4(3,3)$, respectively. In these examples, the dimensions of the isotropic subspaces (in absolute homology) generated by the waist curves of the maximal cylinders in any fixed rational direction are 2 and 3 respectively. Hence, a geometrical criterion of G. Forni for the non-uniform hyperbolicity of Kontsevich-Zorich (KZ) cocycle can not be applied to these examples. Nevertheless, we prove that there are no vanishing exponents and the spectrum is simple for these two square-tiled surfaces. In particular, the non-vanishing of exponents of KZ cocycle for a regular measure doesn't imply that the support of this measure contains a completely periodic surface whose waist curves of maximal cylinders generates a Lagrangian subspace in its absolute homology.)

1. Introduction

Les surfaces arithmétiques (ou surfaces à petits carreaux) sont des cas particuliers de surfaces de translation. Ces dernières ont été introduites pour étudier la dynamique des billards rationnels. L'espace des modules $\Omega\mathcal{M}_g$ des surfaces de translation de genre g est un orbifold affine complexe ; autrement dit il est localement un quotient fini d'un espace vectoriel complexe de dimension fini et les changements de cartes sont des transformations affines. Il est muni d'un fibré plat réel de dimension $2g$: le fibré de Hodge (la fibre en une surface est la cohomologie réelle de cette surface). La monodromie de ce fibré est appelé le *cocycle de Kontsevich-Zorich* (KZ).

L'espace des modules des surfaces de translation possède une action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Cette action et le comportement du cocycle KZ le long des orbites de cette action donnent des renseignements sur la dynamique des flots de translations : mesures invariantes, déviation des sommes de Birkhoff, mélange faible, Nous renvoyons aux survols [Z1, Z2] et [F1] pour les détails.

Une surface de translation dont la $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbite est fermée dans l'espace des modules est appelée *surfaces de Veech* et son orbite une courbe de Teichmüller. Dans ce cas, l'orbite est isomorphe à un quotient de volume fini $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma(S)$ où $\Gamma(S)$ est le *groupe de Veech*, i.e. le stabilisateur de la surface de translation S pour l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Une *surface à petits carreaux* est un revêtement fini du tore plat. Toute surface à petits carreaux est une surface de Veech et son groupe de Veech est commensurable à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Nous renvoyons au survol [HS] pour plus de détails.

L'objet de cette note est la description de deux exemples de surfaces arithmétiques qui montrent qu'il n'y a pas de réciproque au critère géométrique de G. Forni [F2] pour la non-uniforme hyperbolité du cocycle de Kontsevich-Zorich (KZ).

Théorème 1.1 ([F2], Theorem 1.8). *Soit $\Omega\mathcal{M}_g(\kappa)$ une strate de l'espace des modules des différentielles abéliennes sur les surfaces de genre g . Soit μ une mesure affine $SL(2, \mathbb{R})$ -invariante et ergodique. Si dans le support de μ il existe une surface complètement périodique S dont les circonférences des cylindres engendrent un sous-espace isotrope de dimension k de l'homologie alors au moins k des exposants de Lyapunov du cocycle KZ pour la mesure μ sont positifs.*

Soit T le tore \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 muni de la forme abélienne dz . On note \mathring{T} la surface T privée de l'origine et $F_2 = \langle r, u \rangle = \pi_1(\mathring{T})$ où r et u désigne les générateurs canoniques horizontal et vertical du groupe fondamental.

Soit $S_3 \in \Omega\mathcal{M}_3(2, 2)$ le revêtement de degré 8 de \mathring{T} dont les holonomies le long de r et u sont respectivement données par (voir aussi la figure 2)

$$\bar{r} = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8) \quad \text{et} \quad \bar{u} = (1, 2, 3, 5)(4, 8, 7, 6).$$

Le commutateur de \bar{r} et \bar{u} vaut $[\bar{r}, \bar{u}] = \bar{r}\bar{u}\bar{r}^{-1}\bar{u}^{-1} = (2, 4, 5)(3, 8, 6)$ (nous prenons ici la convention de multiplier les permutations de gauche à droite). Remarquons que l'action de $M = \langle \bar{r}, \bar{u} \rangle$ sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ possède deux blocs $\{1, 3, 6, 8\}, \{2, 4, 5, 7\}$ et montre ainsi que S_3 est un revêtement de degré 4 d'un tore ramifié au-dessus de deux points.

Rappelons que dans toutes les directions de pentes rationnelles, une surface à petits carreaux se décompose en un nombre fini de cylindres. C'est par exemple le cas des directions horizontales et verticales. Les classes d'équivalences de ces décompositions sont données par les *pointes* (ou "cusp" en anglais) de la courbe de Teichmüller ; autrement dit les classes de conjugaisons d'éléments paraboliques primitifs dans le groupe de Veech.

Dans cette note, nous démontrons les deux résultats suivants. Premièrement, les espaces isotropes associés aux décompositions en cylindres de la surface S_3 sont de dimension strictement plus petite que le genre de S_3 qui est 3 :

Proposition 1.2. *La courbe de Teichmüller $SL(2, \mathbb{R}) \cdot S_3$ possède deux pointes. Dans chacune des directions de pointes, les circonférences des cylindres engendrent un espace isotrope de dimension 2 dans $H_1(S_3; \mathbb{Z})$.*

Deuxièmement, même si le critère de Forni (théorème 1.1) ne permet pas de démontrer la positivité des exposants dans ce cas, nous obtenons un théorème de positivité et de séparation des exposants :

Théorème 1.3. *Les exposants du cocycle KZ pour la mesure de Haar sur $SL(2, \mathbb{R}) \cdot S_3$ vérifient $1 = \nu_1 > \nu_2 > \nu_3 > 0$.*

Remarque 1. Considérons $S_4 \in \Omega\mathcal{M}_4(3, 3)$ le revêtement de \mathring{T} donné par

$$\bar{r} = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9) \quad \text{et} \quad \bar{u} = (4, 2, 1)(3, 6, 9)(7, 8, 5)$$

La méthode de cette note permet de prouver que, comme précédemment, les espaces isotropes associés aux décompositions en cylindres de la surface S_4 sont de dimensions strictement plus petite que le genre de S_4 (égal à 4) et, dans ce cas aussi, il y a positivité et séparation des exposants. Plus précisément, il est possible de montrer que la courbe de Teichmüller $SL(2, \mathbb{R}) \cdot S_4$ possède 8 pointes, dans chacune des directions de pointes les circonférences des cylindres engendrent un sous-espace isotrope de dimension 3 dans $H_1(S_4; \mathbb{Z})$ et les exposants de Lyapunov du cocycle KZ pour la mesure de Haar sur $SL(2, \mathbb{R}) \cdot S_4$ vérifient $1 = \nu_1 > \nu_2 > \nu_3 > \nu_4 > 0$.

Les surfaces S_3 et S_4 ont été obtenues par génération exhaustive des orbites de surfaces à petits carreaux. Il y a par exemple 14 $SL(2, \mathbb{Z})$ -orbites de surfaces à 8 carreaux dans $\mathcal{M}_3^{odd}(2, 2)$ et 5 orbites pour 9 carreaux dans $\mathcal{M}_4^{nonhyp}(3, 3)$. Toutes les surfaces à petits carreaux jusqu'à 10 carreaux ont été testées. Ces calculs ont été réalisés avec le logiciel Sage [Sa] dont le code spécifique aux surfaces à petits carreaux a été rédigé par le premier auteur à partir de programmes de S. Lelièvre [L] ainsi que la librairie développée par K. Kremer et G. Schmithüsen [KS].

2. Démonstration des résultats pour $S_3 \in \Omega\mathcal{M}_3^{odd}(2, 2)$

Pour démontrer la proposition 1.2 et le théorème 1.3 on utilise un critère de [MMY] donnant une condition suffisante pour la positivité et la séparation des exposants.

Soit S une surface de translation. On note $Aff(S)$ son groupe affine (le groupe des difféomorphismes de S qui sont linéaires dans les cartes) et $\Gamma(S)$ son groupe de Veech (la partie linéaire de $Aff(S)$). De manière générale, on a une suite exacte $1 \rightarrow \text{Aut}(S) \rightarrow \text{Aff}(S) \rightarrow \Gamma(S) \rightarrow 1$. Dans notre cas, la surface S_3 ne possède pas d'automorphisme distinct de l'identité et nous

identifierons dans la suite les matrices de $\Gamma(S_3)$ avec les éléments du groupe affine.

Nous aurons besoin des générateurs de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ suivants

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit S une surface à petits carreaux sans automorphisme non-trivial et $\pi : S \rightarrow T$ le revêtement fini associé. On note $H_1(S; \mathbb{Q}) = H_1^{st}(S; \mathbb{Q}) \oplus H_1^{(0)}(S; \mathbb{Q})$ où le sous-module $H_1^{(0)}(S; \mathbb{Q})$ est l'ensemble des vecteurs d'holonomie nulle pour la forme $\pi^*dz \in \Omega(S)$ et $H_1^{st}(S; \mathbb{Q}) \subset H_1(S; \mathbb{Q})$ est l'espace engendré par les cycles $\pi^{-1}(\gamma)$ où γ est une courbe fermée sur le tore. Si $\phi \in \mathrm{Aff}(S)$ est un élément du groupe affine, alors il préserve le sous-module $H_1^{(0)}(S; \mathbb{Q})$ et on note $\phi^{(0)}$ la restriction de ϕ_* à $H_1^{(0)}(S; \mathbb{Q})$.

Définition 2.1. Soit S une surface à petits carreaux sans automorphismes non-triviaux. Un élément $\phi \in \mathrm{Aff}(S)$ est appelé b-réduit si il est de la forme $L^{a_1}R^{a_2} \dots L^{a_{2k-1}}R^{a_{2k}}$ avec $k \geq 1$ et $a_1, \dots, a_{2k} \geq 1$ entiers.

Cette définition a été introduite par [MMY] motivée par le codage du flot géodésique sur la courbe modulaire $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ par l'algorithme de fractions continues (voir la section 3 de [MMY] et, en particulier la définition 3.7, la proposition 3.8, le corollaire 3.9 et la remarque 3.10 de [MMY]).

On énonce maintenant le critère de [MMY] qui est basé sur les travaux d'A. Avila et M. Viana [AV2]. Dans [AV2] est donné un critère général de séparation et de positivité des exposants de Lyapunov pour les cocycles symplectiques localement constant. Ce critère a entre autre permis de démontrer la séparation des exposants de Lyapunov du cocycle KZ pour les mesures de Liouville sur les strates [AV1].

Théorème 2.2 ([MMY], Theorem 5.4). Soit S une surface à petits carreaux réduite de genre g sans automorphismes non-triviaux. Soit $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aff}(S)$ deux éléments b-réduits et $\phi_1^{(0)}, \phi_2^{(0)} : H_1^{(0)}(S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1^{(0)}(S; \mathbb{Q})$ les actions induites sur l'homologie. Soit K_1 , resp. K_2 , le corps de décomposition de $\phi_1^{(0)}$, resp. $\phi_2^{(0)}$, dans \mathbb{C} . Si

- 1) le polynôme caractéristique de $\phi_1^{(0)}$ est irréductible sur \mathbb{Q} , ses racines sont toutes réelles, et son groupe de Galois est isomorphe à $S_{g-1} \rtimes \{\pm 1\}^{g-1}$,
- 2) le polynôme minimal de $\phi_2^{(0)}$ est de degré > 2 et sans facteur irréductible de degré pair,

3) $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$,

alors le cocycle KZ au-dessus de la courbe de Teichmüller de S a g exposants positifs et séparés.

Dans la suite, nous construisons deux éléments $\phi_1, \phi_2 \in \Gamma(S_3)$ vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus. Nous commençons par décrire la courbe de Teichmüller de la surface S_3 .

Proposition 2.3. *Le groupe de Veech $\Gamma(S_3)$ de l'origami S_3 est le sous-groupe d'indice 3 de $SL(2, \mathbb{Z})$ donné par*

$$\Gamma(S_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) ; a + b \equiv c + d \equiv 1 \pmod{2} \right\}.$$

En particulier, la courbe de Teichmüller \mathcal{C} est de genre 0 et possède deux pointes.

Démonstration. Nous appliquons l'algorithme de [Sc1] pour déterminer l'action de L et R sur les classes d'équivalences de permutations. Le groupe de Veech est alors donné par l'ensemble obtenu par la composition des matrices L et R le long des lacets enracinés en S_3 dans le graphe orienté de la figure 1. Le groupe $\Gamma(S_3)$ est engendré par L^2, LRL, R^2, RLR , ce qui termine

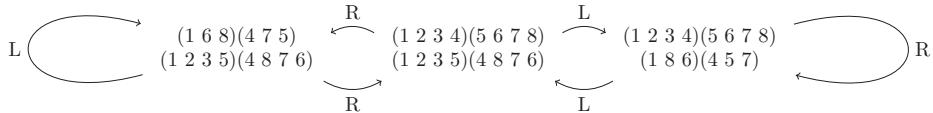


FIGURE 1: Orbite de S_3 sous l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$.

la preuve. □

La proposition 2.3 permet d'obtenir la proposition 1.2 de la façon suivante :

Démonstration de la Proposition 1.2. Les décompositions en cylindres d'une surface complètement périodique dans l'orbite $SL(2, \mathbb{R}) \cdot S_3$ sont reliées aux pointes de $\Gamma(S_3)$, i.e., les L -orbites des éléments de $SL(2, \mathbb{Z}) \cdot S_3$ (par un lemme d'Anton Zorich, cf. Lemma 2.5 dans [HL]). D'après la proposition 2.3, il y a deux décompositions en cylindres à étudier reliées aux deux pointes de $\Gamma(S_3)$. On vérifie (à partir de la figure 2) que dans la première pointe (i.e., la L -orbite de taille 2 contenant S_3) la décomposition est faite de deux

cylindres non homologues et (à partir de la figure 3) que dans la seconde (i.e., la L -orbite de taille 1) elle a trois cylindres dont deux sont homologues. \square

Nous choisissons maintenant une base de $H_1(S_3; \mathbb{Q})$ de manière à pouvoir faire des calculs. La surface S_3 est munie d'une décomposition simpliciale canonique $C_1(S_3) = \bigoplus_{i=1}^8 \mathbb{Q}a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^8 \mathbb{Q}b_i$ venant du revêtement $S_3 \rightarrow T$ (voir figure 2).

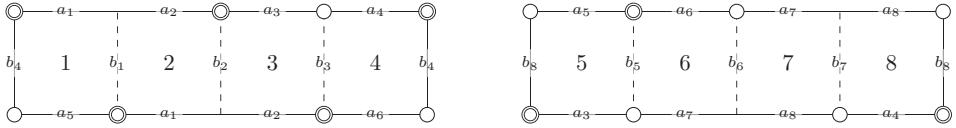


FIGURE 2: La surface S_3 et sa décomposition simpliciale.

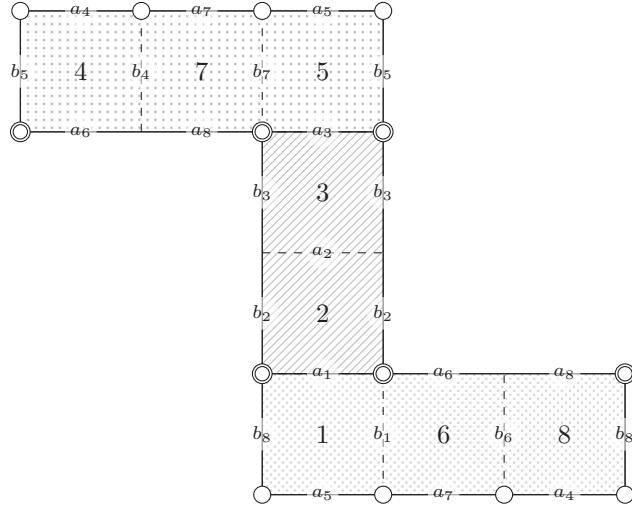


FIGURE 3: La surface $R \cdot S_3$ et sa décomposition simpliciale. Les cylindres formés respectivement des carrés $\{1, 6, 8\}$ et $\{4, 7, 5\}$ sont homologues.

On remarquera que tous les cycles relatifs a_i (resp. b_i) sont d'holonomie $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$). Une base de $H_1^{st}(S_3; \mathbb{Q})$ est donnée par les deux vecteurs $a = \sum_{i=1}^8 a_i$ et $b = \sum_{i=1}^8 b_i$. On choisit pour base de $H_1^{(0)}(S_3; \mathbb{Q})$ les vecteurs suivants $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_7 - a_8), (a_4 - a_5), \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - b_6 - b_7), (b_4 - b_5) \right\}$. Toutes les matrices dans la suite seront exprimées dans la base \mathcal{B} . En

particulier, la forme d'intersection restreinte à $H_1^{(0)}(\mathrm{S}_3; \mathbb{Q})$ est donnée par la matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous construisons maintenant des éléments pseudo-Anosov de $\mathrm{Aff}(\mathrm{S}_3)$ en suivant un chemin dans le graphe associé à l'action de L et R sur la $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ orbite de S_3 (voir figure 1). On choisit des chemins particuliers qui sont des produits des éléments paraboliques L^2 et R^2 .

On établit tout d'abord.

Lemme 2.4. *Les matrices sur $H_1^{(0)}$ associées aux transformations paraboliques L^2 et R^2 sont*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $\phi_1 = L^8 R^2 L^2 R^2$ et $\phi_2 = L^6 R^6 L^4 R^2$ vus comme des éléments de $\mathrm{Aff}(\mathrm{S}_3)$. On vérifie alors

Lemme 2.5. *Les éléments ϕ_1 et ϕ_2 vérifient les hypothèses du théorème 2.2.*

Les polynômes caractéristiques de $\phi_1^{(0)}$ et $\phi_2^{(0)}$ sont respectivement $\chi_1 = x^4 - 2x^3 - 30x^2 - 2x + 1$ et $\chi_2 = x^4 + 22x^3 - 78x^2 + 22x + 1$. Notons respectivement K_1 et K_2 les corps de décomposition de ces polynômes. Pour conclure que $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$ on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.6. *Soit $P = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme réciprocque irréductible (dans $\mathbb{Z}[x]$). Notons $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1} \in \mathbb{C}$ ses quatre racines. Le corps $K = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est le corps de décomposition de P et notons*

$$\begin{aligned} K' &= \mathbb{Q}[\alpha + \alpha^{-1}] = \mathbb{Q}[\beta + \beta^{-1}] = \mathbb{Q}[\sqrt{a^2 - 4(b-2)}] \\ K'' &= \mathbb{Q}[(\alpha + \beta)(\alpha^{-1} + \beta^{-1})] = \mathbb{Q}[(\alpha + \beta^{-1})(\alpha^{-1} + \beta)] \\ &= \mathbb{Q}[\sqrt{(b+2)^2 - 4a^2}] \\ K''' &= \mathbb{Q}[\alpha\beta^2 + \beta\alpha^{-2} + \alpha^{-1}\beta^{-2} + \beta^{-1}\alpha^2] \\ &= \mathbb{Q}[\sqrt((b+2)^2 - 4a^2)(a^2 - 4(b-2))]. \end{aligned}$$

Alors, K' est de degré 2. De plus

- 1) si $K'' = \mathbb{Q}$, alors K est de degré 4 de groupe de Galois $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (groupe de Klein)
- 2) si $K''' = \mathbb{Q}$, alors K est de degré 4 de groupe de Galois $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- 3) si K' , K'' et K''' sont de degré 2, alors K est de degré 8, son groupe de Galois est D_4 (groupe diédral) et K possède exactement trois sous-corps de degré 2 qui sont K' , K'' et K''' .

Ce lemme se vérifie par un calcul direct présenté dans l'annexe A (voir aussi la section 6 de [MMY]).

Les polynômes χ_1 et χ_2 sont réciproques et irréductibles. Ainsi, grâce au lemme 2.6, nous savons que les degrés de K_1 et K_2 sont des puissances de 2. Ainsi, montrer que l'intersection $K_1 \cap K_2$ se réduit à \mathbb{Q} revient à montrer qu'il n'ont pas de sous-corps quadratiques communs. Le lemme donne que K_1 et K_2 sont tous deux de degré 8 et que leurs sous-corps quadratiques sont

- 1) $K'_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{3 \cdot 11}]$, $K''_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ et $K'''_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{11}]$,
- 2) $K'_2 = \mathbb{Q}[\sqrt{3 \cdot 67}]$, $K''_2 = \mathbb{Q}[\sqrt{3 \cdot 5}]$ et $K'''_2 = \mathbb{Q}[\sqrt{5 \cdot 67}]$.

Ainsi, K_1 et K_2 n'ont pas de sous-corps quadratiques communs et les conditions du critère du théorème 2.2 sont vérifiées. Ce qui termine la preuve du théorème 1.3.

Les valeurs expérimentales pour les exposants de Lyapunov de S_3 (obtenues grâce à un programme d'A. Zorich) sont $\nu_2 \simeq 0.5879$ et $\nu_3 \simeq 0.0787$. Le fait que la valeur de ν_3 soit petite devant ν_2 explique peut-être pourquoi nous avons été obligé de prendre des produits relativement grand pour ϕ_1 et ϕ_2 .

Remarquons d'autre part que dans les deux exemples présentés dans cette note, les dimensions homologiques sont $g - 1$ si g désigne le genre de la surface.

Remerciements

Les auteurs remercient le rapporteur de l'article pour la relecture attentive d'une version préliminaire de ce texte.

Annexe A. Démonstration du lemme 2.6

Le groupe de Galois d'un polynôme quartique irréductible est un sous-groupe transitif de S_4 . La liste de sous-groupes *transitifs* de S_4 est :

- (a) S_4, A_4
- (b) $\langle(1234), (13)\rangle, \langle(1324), (12)\rangle, \langle(1243), (14)\rangle$
- (c) $\langle(1234)\rangle, \langle(1324)\rangle, \langle(1243)\rangle$
- (d) $\{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Ici, les 3 sous-groupes listés dans (b) sont conjugués et isomorphes au groupe diédral D_4 , les 3 sous-groupes listés dans (c) sont conjugués et isomorphes au groupe cyclique $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et le sous-groupe dans (d) est isomorphe au groupe de Klein $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans notre cas, le polynôme quartique irréductible $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ est réciproque, de façon que ses racines $\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}$ sont calculées par le changement de variables $u = x + 1/x$. En effet, il suffit de remarquer que $P(x) = 0$ implique que $u^2 + au + (b - 2) = 0$ et de résoudre l'équation $x^2 - ux + 1 = 0$. Par cette méthode classique, nous trouvons que

$$(A.1) \quad \alpha^{\pm 1} = \frac{u_+ \pm \sqrt{u_+^2 - 4}}{2} \quad \text{and} \quad \beta^{\pm 1} = \frac{u_- \pm \sqrt{u_-^2 - 4}}{2}$$

où $u_{\pm} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b - 2)})/2 := (-a \pm \sqrt{\Delta_1})/2$. En particulier, le corps de décomposition $K_P = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est de degré 4 ou 8, et le groupe de Galois de P est $V_4, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou D_4 .

Pour la suite, notons que si $\delta_{\pm} := u_{\pm}^2 - 4$, alors

- $\delta_+ \delta_- = (b + 2)^2 - 4a^2 := \Delta_2$,
- $4(\alpha + \beta)(\alpha^{-1} + \beta^{-1}) = 8 + 2(b - 2) - 2\sqrt{\delta_+ \delta_-}$
 $= 8 + 2(b - 2) - 2\sqrt{\Delta_2}$
- $4(\alpha + \beta^{-1})(\alpha^{-1} + \beta) = 8 + 2(b - 2) + 2\sqrt{\delta_+ \delta_-}$
 $= 8 + 2(b - 2) + 2\sqrt{\Delta_2}$
- $8(\alpha\beta^2 + \beta\alpha^{-2} + \alpha^{-1}\beta^{-2} + \beta^{-1}\alpha^2)$
 $= -4a(b - 2) + 8a - 4\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta_2}$

Donc,

$$K''_P = \mathbb{Q}[(\alpha + \beta)(\alpha^{-1} + \beta^{-1})] = \mathbb{Q}[(\alpha + \beta^{-1})(\alpha^{-1} + \beta)] = \mathbb{Q}[\sqrt{\Delta_2}]$$

et

$$K'''_P = \mathbb{Q}[\alpha\beta^2 + \beta\alpha^{-2} + \alpha^{-1}\beta^{-2} + \beta^{-1}\alpha^2] = \mathbb{Q}[\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta_2}]$$

Pour pouvoir distinguer entre les 3 cas possibles $V_4, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou D_4 pour le groupe de Galois de P , notons que l'expression $(\alpha + \beta)(\alpha^{-1} + \beta^{-1})$ est V_4 -invariante mais pas $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -invariante ou D_4 -invariante. Donc, le groupe de Galois de P est isomorphe au groupe de Klein V_4 si et seulement si $K''_P = \mathbb{Q}$. Dans cette situation, le corps de décomposition $K = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est une extension de degré 4 de \mathbb{Q} . Ceci montre la première partie du lemme.

Maintenant, si $K''_P \neq \mathbb{Q}$, i.e., $\sqrt{\Delta_2} \notin \mathbb{Q}$, le groupe de Galois est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou D_4 , et nous pouvons distinguer ces 2 cas car l'expression $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^{-2} + \alpha^{-1}\beta^{-2} + \beta^{-1}\alpha^2$ est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -invariante mais pas D_4 -invariante. Donc, le groupe de Galois group de P est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si et seulement si $K'''_P = \mathbb{Q}$ et $K''_P \neq \mathbb{Q}$. Ainsi, le corps de décomposition $K = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est aussi une extension de degré 4 de \mathbb{Q} . Ceci montre la deuxième partie du lemme.

Finalement, si $K''_P, K'''_P \neq \mathbb{Q}$, i.e., $K''_P = \mathbb{Q}[\sqrt{\Delta_2}]$ et $K'''_P = \mathbb{Q}[\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta_2}]$ sont des extensions quadratiques de \mathbb{Q} , alors le groupe de Galois de P est D_4 et le corps de décomposition $K = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est une extension de degré 8 de \mathbb{Q} . De plus, les sous-corps de K de degré 2 sur \mathbb{Q} correspondent aux sous-groupes de D_4 d'indice 2, i.e., d'ordre 4 : il y en a 3 et il n'est pas difficile de vérifier que les sous-corps associés sont K'_P, K''_P et K'''_P . La preuve du lemme est complète.

Références

- [AV1] A. Avila et M. Viana, *Simplicity of Lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture*. Acta Math., (2007), pp. 1–56.
- [AV2] A. Avila et M. Viana, *Simplicity of Lyapunov spectra : a sufficient criterion*. Portugaliae Mathematica, **64** (2007), pp. 311–376.
- [F1] G. Forni, *Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus*. Annals of Math., vol. 155, No. 1, (Jan. 2002), pp. 1–103.
- [F2] G. Forni with an appendix of C. Matheus, *A geometric criterion for the nonuniform hyperbolicity of the Kontsevich-Zorich cocycle*. J. Mod. Dyn., vol. 5, (2011), pp. 355–395.
- [KS] K. Kramer et G. Schmithüsen, *Software on origami*. <http://www.math.kit.edu/iag3/seite/ka-origamis/en>.
- [HL] P. Hubert et S. Lelièvre, *Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$* . Israel J. Math., **151** (2006), pp. 281–321.
- [HS] P. Hubert et T. Schmidt, *An introduction to Veech surfaces*. Handbook of dynamical systems Vol. 1B, Elsevier B. V., Amsterdam, (2006), pp. 501–526.
- [L] S. Lelièvre, personnel communication.
- [MMY] C. Matheus, M. Möller et J.-C. Yoccoz, *A criterion for simplicity of the Lyapunov spectrum of square-tiled surfaces*. Invent. Math., **202** (2015), 333–425.

- [Sa] W. A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 4.6.1)*. The Sage Development Team, 2010, <http://www.sagemath.org>.
- [Sc1] G. Schmithüsen, *An algorithm for finding the Veech group of an origami*. Experimental Mathematics 13, No. 4, (2004), pp. 459–472.
- [Z1] A. Zorich, *Deviation for interval exchange transformations*. Ergod. Th. and Dyn. Sys., **17** (1997), pp. 1477–1499.
- [Z2] A. Zorich, *How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface*. “Pseudoperiodic Topology”, V. I. Arnold, M. Kontsevich, A. Zorich (eds), Translations of the AMS, Ser. 2, vol. 197, (1999), pp. 145–178.

LABRI, DOMAINE UNIVERSITAIRE
351 COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE, FRANCE
E-mail address: 20100.delecroix@gmail.com

UNIVERSITÉ PARIS 13, SORBONNE PARIS CITÉ, LAGA, CNRS (UMR 7539)
F-93439, VILLETTANEUSE, FRANCE
E-mail address: matheus.cmss@gmail.com

RECEIVED JUNE 10, 2013